École d'ingénierie

Examen final en Algèbre linéaire

Durée (2h : 00 mn)

CPI2

Prof. : A.Ramadane

03-06-2016

Université Internationale de Casablanca

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Exercice 1 : (5 points)

Soit B=($\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$) une base de V^3 telle que

Soit $\overrightarrow{b_1} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{b_2} = -\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ et $\overrightarrow{b_3} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ des vecteurs de V^3

á) Trouver la base orthonormale B'', obtenue à partir de B par le procédé de Gram-Schmidt

b) Donner la matrice de transition de B à B'', ${}_{B''}\mathbf{P}_B$

c) Donner la matrice de transition de C à B'', ${}_{B''}\mathbf{P}_C$. Avec C=($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)

d) Soit $\vec{U} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, Donner [$\vec{U}$]$_{B''}$.

a) Soit W = [$\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$]. Exprimer $\vec{U}$ sous la forme $\vec{U} = \overrightarrow{W_1} + \overrightarrow{W_2}$ où $\overrightarrow{W_1} \in W$ et $\overrightarrow{W_2} \in W^{\perp}$

Exercice 2 : (5 points)

Soit V^3 et sa base usuelle C =($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) , soit une application linéaire

$T : V^3 \longrightarrow V^3$ telle que

$T(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (x+y+3z)\vec{i} + (x + 2y + z)\vec{j} + (x+y+3z)\vec{k}$

a) Donner [T]$_C$ la matrice représentative de T dans la base de C

b) Quelle est la dimension de Ker(T)

c) Donner une base de Im(T) et le rang de T.

d) Montrer que le vecteur $-8\vec{i} + 16\vec{j} - 8\vec{k}$ appartient à l'image de T.

Résoudre le système $\begin{cases} x + y + 3z = -8 \\ x + 2y + z = 16 \\ x + y + 3z = -8 \end{cases}$

1

Université Internationale de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Exercice 3: (5 points)

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & a \\ -1 & 2 & -1 \\ a & -1 & 3 \end{bmatrix}$, a est un réel

a) Discuter, selon les valeurs a, du rang de A.

b) Lorsque a =-2, le vecteur $[1 \ \ 0 \ \ -1]^t$ est un vecteur propre de A. Diagonaliser la matrice A, donne la matrice orthogonale P qui diagonalise A et expliquer le lien entre A et la matrice D.

Exercice 4 : (5 points)

a) Calculer A^{1000} et e^A ; avec $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$; avec $0! = 1$ et $A^0 = Id$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (Indication : Diagonaliser la matrice, $A = P^t D P$)

b) Donner des objectifs de la diagonalisation